FUNCTIA DE GRADUL INTAI

Funcţia de gradul I: definiţie, exemple, rezolvarea ecuaţiei de gradul I

Identificarea funcţiei de gradul întîi:
Funcţia f: $R \to R$, f(x) = ax + b, a, $b \in R$, se numeşte *funcţie afină.*
Dacă $a \neq 0$, f se numeşte ***funcţie de gradul I*** de coeficienţi a,b.
Dacă $a \neq 0$ şi b = 0 (f(x)=ax), f se numeşte *funcţie liniară.*
Dacă a = 0 (f(x)= b), f se numeşte *funcţie constantă.*
Pentru funcţia de gradul I, *ax* se numeşte *termenul de gradul I*, iar *b termenul liber* al funcţiei.
Ecuaţia: ***ax + b = 0, a ≠ 0,*** se numeşte ***ecuaţia de gradul întâi,*** cu o necunoscută, ataşată funcţiei f.
Exemple.
Teoremă: Funcţia de gradul I, f: $R \to R$, f(x) = ax + b, a, $b \in R$, $a \neq 0$, are zeroul: $x = -\frac{b}{a}$, iar semnul funcţiei este dat în tabelul de semn:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f(x)	Semn contrar lui a		0	Acelaşi semn cu a	

Numărul $x = -\frac{b}{a}$ se numeşte *solutie (radacina)* a ecuaţiei ataşate: ax+b=0. Altfel spus, până la rădăcină (adică pentru $x < -\frac{b}{a}$), f are semn contrar lui a, iar dincolo de rădăcină (adică pentru $x > -\frac{b}{a}$), f are semnul lui a.

Comentarii:
1) Funcţia f: $R \to R$, f(x)=ax + b, $a \neq 0$, se numeşte funcţia de gradul I.
2) Funcţia de gradul I este bine determinată, dacă se cunosc coeficienţii a, $b \in R$, $a \neq 0$.
3) Deoarece domeniul şi codomeniul lui f, coincid cu R, funcţia de gradul întâi este o funcţie numerică.
4) La rezolvarea ecuaţiilor de gradul I, se ţine cont de *artificiile de calcul:*

- Prin adunarea la ambii membri ai unei ecuaţii, a aceluiaşi număr real, se obţine o ecuaţie echivalentă cu cea dată.
- Prin înmulţirea ambilor membri ai unei ecuaţii, cu un acelaşi număr real, diferit de zero, se obţine o ecuaţie echivalentă cu cea dată.
- Dacă $a \neq 0$, ecuaţia are soluţie unică.

Exerciţii :
1) de recunoaştere a unor funcţii(afine, de gradul I, liniare, constantă);
2) de rezolvare a unor ecuaţii de gradul I, fără/şi cu parametru;
3) de determinare a semnului unor funcţii de gradul I.
4) Exerciţii de determinare a unor funcţii, în anumite condiţii date.

Interpretarea grafică a proprietăţilor algebrice, ale funcţiei de gradul I; monotonia; studiul monotoniei prin semnul diferenţei valorilor sau prin studierea raportului de variaţie

Teoremă:

Funcţia de gradul I f: R$\to$R, f(x)=ax + b, a$\neq$0 este:

1) strict crescătoare, dacă a > 0;
2) strict descrescătoare, dacă a < 0.

<u>*Comentarii:*</u> Monotonia funcţiei de gradul I, se poate studia în două moduri:

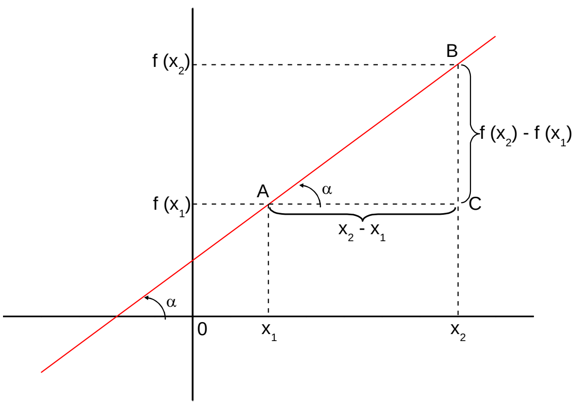
- *aplicând procedeul raportului de variaţie*, asociat funcţiei f şi numerelor x_1, x_2 : R(x_1, x_2)= $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, $x_1 \neq x_2$ (sau rata creşterii, dacă R(x_1, x_2) > 0, respectiv rata descreşterii, dacă R(x_1, x_2) < 0).
- *aplicând procedeul diferenţei valorilor*.

<u>*Exerciţii*</u> de :

- Stabilire a monotoniei unor funcţii de gradul I.
- Determinare a valorilor extreme ale unor funcţii monotone.

Intersecţia graficului funcţiei de gradul I cu axele de coordonate; reprezentarea grafică a funcţiei f: R$\to$R, f(x)= ax + b, a,b$\in$R

Fie f: R$\to$R, f(x) = ax + b, a$\neq$0; *graficul funcţiei de gradul I este o dreaptă*: ecuaţia dreptei este: y = ax + b, a$\neq$0.
Consider în reperul cartezian xOy, punctele A(x_1,f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), $x_1 \neq x_2$, situate pe graficul funcţiei f.



Avem: tgα = $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ = a (1); fie D(x, f(x)) alt punct alt punct al graficului funcţiei, diferit de A, B; din triunghiul AC'B, dreptunghic, rezultă: tgα'= $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ = a (2);

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ $\alpha = \alpha$ ' $\Rightarrow$ punctele: A, B, C sunt coliniare $\Rightarrow$ ***graficul funcţiei de gradul I este o dreaptă.***

Observaţii: 1) Dreapta AB taie axa Ox şi face cu aceasta unghiul α ; 2) a = tgα se numeşte *panta (coeficientul unghiular)* dreptei .

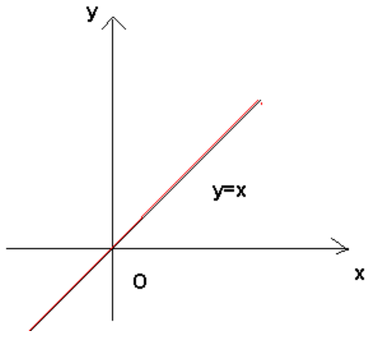
Comentarii:

- Pentru trasarea dreptei, determinăm *tăieturile* dreptei (punctele în care dreapta taie axele de coordonate).
- *Intersecţia cu axa Ox:* y=0 $\Leftrightarrow$ x= $-\frac{b}{a}$; deci:

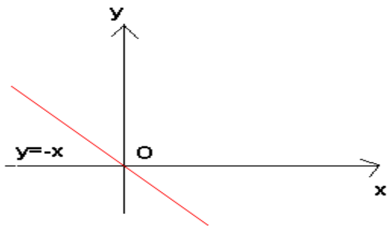
  M($-\frac{b}{a}$,0) $\in$ Ox;

  - *Intersecţia cu axa Oy:* x = 0, f(0)=b; deci, punctul N(0,b) $\in$ Oy. Valoarea f(0)=b se numeşte *ordonata la origine.*
  - *Poziţii particulare ale dreptei, în plan.*

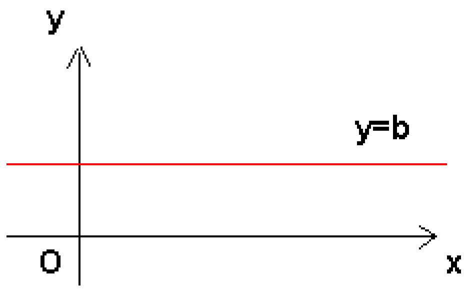
    ✓ Dacă f: R $\rightarrow$ R, ***f(x) = ax,*** a $\neq$ 0, graficul lui f este o ***dreaptă, ce conţine originea***; pentru a = 1 $\Rightarrow$ ***y = x: ecuaţia primei bisectoare;***



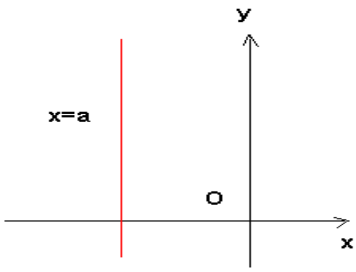
Pentru a= -1 $\Rightarrow$ ***y = - x: ecuaţia celei de a doua bisectoare.***



✓ Pentru a = 0, b $\neq$ 0, ***y = b*** reprezintă ecuaţia unei ***drepte paralele cu axa Ox;***



- ✓ Dreapta: ***x* = *a***, reprezintă ecuaţia unei ***drepte* // *Oy.***



- Exerciţii de trasare a graficelor unor funcţii.

Interpretarea grafică a proprietăţilor algebrice ale funcţiei de gradul I

Pentru funcţia de gradul I, f: R$\rightarrow$R, f(x) = ax + b, cu :

- a >0, graficul este o dreaptă „ascendentă”,
- iar cu a <0, graficul este o dreaptă „descendentă”.

Comentarii:

Fie f, g : R$\rightarrow$R, două funcţii de gradul I;

- graficele funcţiilor f,g sunt *simetrice, faţă de axa Ox,* dacă : g(x) = - f(x), $\forall$ x$\in$R.
- graficele funcţiilor f,g sunt *simetrice, faţă de axa Oy*, dacă : g(-x) = f(x), $\forall$ x$\in$R.

Exemple: 1) Dreptele y = 2x, y = -2x sunt simetrice în raport cu Ox şi cu Oy.

3) Dreptele y = 2x, y = $\frac{x}{2}$ sunt simetrice în raport cu prima bisectoare.

Exerciţii de trasare a graficelor unor funcţii, în anumite condiţii date, exemplu:

1) f(x) = [2x] , x$\in$[0, 1] ;

2) f(x) = $|x-3|$.

Inecuaţii de gradul I , forma :ax + b$\le$($\ge$, <, >), studiate pe R, sau pe intervale de numere reale

Identificarea inecuaţiei cu o singură necunoscută x în mulţimea R; identificarea soluţiei inecuaţiei.

A rezolva o inecuaţie, pe o mulţime, înseamnă a-i determina toate soluţiile în acea mulţime.

Doua *inecuaţii* se numesc *echivalente*, pe o mulţime, dacă au aceeaşi multime de soluţii (în mulţimea dată).

Ca şi la ecuaţii, inecuaţiile se transformă, aducându-se la o formă cât mai simplă, prin *transformări echivalente*, cum ar fi :

- $x \le y + z \Leftrightarrow x - y \le z$;
- $x \le y$, $a > 0 \Leftrightarrow (ax \le ay$, $a > 0$);
- $x \le y$, $a < 0 \Leftrightarrow (ax \ge ay$, $a < 0$).

Metode de rezolvare a inecuaţiei de gradul I :

$ax + b \ge 0$, $a \ne 0$:

- *Metoda 1 : prin transformări echivalente* ; dacă rezolvarea inecuaţiei, se face pe o mulţime $A \subseteq R$, atunci mulţimea de soluţii a inecuaţii este $S \cap A$, cu S determinat mai sus.
- *Metoda 2 : utilizând semnul funcţiei de gradul I.*

Exerciţii de genul :

- Să se rezolve, prin ambele metode, inecuaţiile: a) $3x + 5 \ge 0$; b) $-2x + 3 > 0$.

Inecuaţii care se reduc la inecuaţii de forma : $ax + b \ge 0$, $a \ne 0$, cum ar fi : a) $3x + 1 \ge -x + 5$;
b) $\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} + 1 < \frac{1}{6}$.

Inecuaţii de gradul I (studiate pe R sau pe intervale de numere reale)

Pentru ***determinarea semnului expresiei***: $E(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, a, b, c, d$\in$R, se procedează astfel :

- Se consideră funcţiile f, g : R$\to$R, f(x) = ax + b, g(x) = cx + d şi se studiază semnul acestor funcţii , intr-un tabel de forma :

| - ∞

x	+ ∞
f(x)	
g(x)	
E(x)	

- Se completează tabelul cu semnul funcţiilor f , g şi respectiv al câtului E(x) , ţinându-se seama de regula semnelor.

Exerciţii de genul :

- ✓ Să se determine semnul expresiilor : a) E(x)=$\frac{-3x+5}{2x+1}$; b) E(x)= $x^3 - 7x + 6$.
- ✓ Să se rezolve inecuaţia : $\frac{2x}{1-3x} \geq 3$.

Sisteme de ecuaţii de gradul I; poziţia relativă a două drepte, sisteme de tipul:

$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y+c' \end{cases}$ **a,b,c,a',b',c'$\in$R**

Identificarea ecuaţiei de gradul I în două necunoscute: x, y: ax +by+c = 0, cu a, b, c$\in$R(sau ecuaţie liniară în x şi y).
Se numeşte *soluţie* a acestei ecuaţii, orice cuplu $(s_1, s_2) \in$ R X R , care verifică egalitatea: $as_1+bs_2 = c$.
Identificarea unui *sistem de două ecuaţii de gradul I*(sau *liniar*) *cu două necunoscute* :
$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ (1), cu a, b, c, a', b', c'$\in$R ;

numerele a, b, a', b' se numesc : coeficienţii necunoscutelor, iar c, c' se numesc termenii liberi ai sistemului liniar.
Dacă c = c' = 0, sistemul se numeşte *liniar omogen.*
Se numeşte *soluţie* a sistemului liniar definit, orice cuplu $(s_1,s_2) \in$ R X R, care este soluţie pentru fiecare ecuaţie a sistemului.
Pentru sistemul liniar omogen, cuplul (0,0) este întotdeauna soluţie(soluţia banală)
Comentarii :

- A rezolva un sistem (1), înseamnă a-i determina soluţiile (dacă există).
- Interpretarea geometrică.
- Sisteme de forma (1) echivalente : sunt sistemele ale căror mulţimi de soluţii sunt egale.
- Transformări asupra ecuaţiilor unui sistem :
  - Adunarea unei ecuaţii a sistemului, la o altă ecuaţie a sistemului.
  - Înmulţirea ecuaţiilor sistemului prin factori nenuli.
  - Schimbarea ordinii ecuaţiilor în sistem.
- Sisteme echivalente: sisteme care se obţin unul din celălalt, prin una din transformările de mai sus .
- Prin transformările enumerate, se caută eliminarea succesivă a necunocutelor.

Metode de rezolvare :

- ✓ Metoda reducerii; interpretare geometrică.
- ✓ Metoda substituţiei: interpretare geometrică.

Exerciţii : Să se rezolve sistemele şi să se interpreteze geometric soluţia:

1) $\begin{cases} x-2y=7 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=1 \end{cases}$.

Intersecţia a două drepte

Comentarii:

- Dacă sistemul $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c \end{cases}$, a, b, c, a', b', c' $\in$ R (1) este compatibil determinat (are soluţie unică), dreptele sunt concurente.

Pentru a obţine punctul de intersecţie a două drepte concurente, se rezovă sistemul format din ecuaţiile celor două drepte.

- Dacă sistemul (1) este compatibil nedeterminat (are mai mult de o soluţie), deducem că dreptele coincid: d = d'.
- Dacă sistemul (1) este incompatibil (nu are soluţii), atunci dreptele sunt paralele: d//d'.
- O dreaptă în plan , îl separă în două semiplane.
- Caracterizarea(din punctul de vedere al algebrei) punctelor celor două semiplane.

Exerciţii de tipul: să se reprezinte în planul cartezian, dreapta (d) : x – 2y + 4 = 0 şi să se determine punctele din plan, pentru care pe rând: x - 2y + 4 > 0, x - 2y + 4 < 0.